

MATEMATICA III

CORSO DI LAUREA IN STATISTICA, ECONOMIA, FINANZA E ASSICURAZIONI
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE, INFORMATICA E STATISTICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
A.A. 21/22

DOCENTE: DOTT. GIULIO GALISE

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Prova scritta del 9.02.2022

Esercizio 1 (6 punti). Siano

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, |y| < 1\}, \quad Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x^2\}.$$

Rappresentare graficamente gli insiemi X e $Y \setminus X$. Indicare (senza giustificare la risposta) la parte interna $\overset{\circ}{X}$, la frontiera ∂X , la chiusura \overline{X} e dire se il punto $(0, 1)$ è di accumulazione per $Y \setminus X$.

Esercizio 2 (8 punti). Sia $f(x, y) = y|x|$.

(i) Calcolare, al variare del versore $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, la derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0).$$

(ii) Studiare la derivabilità parziale di f rispetto ad x nei punti $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$.

Esercizio 3 (9 punti). Sia $f(x, y) = x^2y + xy^2 + x^3 - x$.

(i) Determinare massimo e minimo assoluti di f nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4\}.$$

(ii) Determinare $\sup_{\mathbb{R}^2} f$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f$.

Esercizio 4 (10 punti). Sia

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

(i) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_D e^z dx dy dz.$$

(ii) Provare che per ogni $R > 0$ risulta

$$\iiint_{B_R} \sin(x) \sin^3(y) \sin^5(z) dx dy dz \leq \iiint_D e^z - 1 dx dy dz$$

essendo

$$B_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$